

---

## Supuesto Nº5 Examen CSIHE

14 de septiembre de 2024

5.1. Dos estudiantes de ingeniería informática, después de llevar algún tiempo trabajando en un proyecto de inteligencia artificial, decidieron hace tres años crear una startup para lo que tuvieron que solicitar, en el momento inicial, un préstamo a 15 años por un importe de 80.000€. Las condiciones del mismo estipuladas por la entidad bancaria fueron:

- Interés nominal para el primer año 1,20% y el resto de los años Euribor más 1,20%
- Comisión de apertura 1%
- Comisión por cancelación anticipada 1,2%

En el momento actual y una vez pagada la última mensualidad del tercer año deciden acudir a otro banco, cancelan el préstamo actual y obtienen uno nuevo por el tiempo restante a un tanto fijo nominal del 3% y pagos mensuales crecientes en progresión de un 2% anual acumulativo

SE PIDE:

1. Sabiendo que el Euribor del segundo y tercer año fue del 1% y 0,75%, respectivamente, determinar las mensualidades del préstamo durante los tres primeros años.
2. Determinar las mensualidades del segundo préstamo

Características préstamo original

Importe 80.000 euros (gastos apertura 800)

Duración 15 años

Pagos mensuales (el enunciado nos habla de mensualidades)

Interés nominal del 1,2% anual para el primer año

Calculo de la mensualidad inicial ( primer año del préstamo)

$$1,2\%/12 = 0,1\%$$

$$80.000 = \text{mensualidad} \times (1 - 1,001^{-15 \times 12}) / 0,001$$

---

Mensualidad primer año del préstamo = 485,86

Después de los primeros 12 pagos el capital pendiente de pago es

$$\text{Capital pendiente} = 485,86 \times (1 - 1,001^{-14 \times 12}) / 0,001 = 75.102,73879$$

La nueva mensualidad para el segundo año del préstamo será

$$(1,2\% + 1\%) = 2,2\% / 12 = 0,18333$$

$$75102,73879 = \text{mensualidad segundo año} \times (1 - 1,001833^{-14 \times 12}) / 0,001833$$

Mensualidad segundo año = 519,8052859

El capital vivo después de 12 meses (24 en total)

$$\text{Capital pendiente} = 519,8052859 \times (1 - 1,001833^{-13 \times 12}) / 0,001833 = 70.470,78$$

En el tercer año el interés es

$$1,2 + 0,75\% / 12 = 1,95 / 12 = 0,1625\%$$

$$70.470,786 = \text{mensualidad tercer año} \times (1 - 1,001625^{-13 \times 12}) / 0,001625$$

Mensualidad tercer año = 511,772

El capital vivo después de 12 meses (36 en total)

$$\text{Capital pendiente} = 511,77 \times (1 - 1,001625^{-12 \times 12}) / 0,001625 = 65.660,58336$$

Por la cancelación se pagará el  $1,2\% \times 65.660,58 = 787,92696$

El enunciado nos dice “cancelan el préstamo actual y obtienen uno nuevo por el tiempo restante a un tanto fijo nominal del 3% y pagos mensuales crecientes en progresión de un 2% anual acumulativo “

El nuevo préstamo será por 12 años, pero no se indica si se pide por 65.660,58336 (cantidad pendiente del préstamo) o por el importe pendiente más los gastos de cancelación.

Considero en la resolución que se pide un préstamo solo por el importe pendiente sin incluir los gastos de cancelación (los cálculos serían iguales pero el importe sería superior si se pide el préstamo para cubrir el principal y los gastos de cancelación)

El nuevo préstamo se amortiza con cuotas en progresión geométrica que se incrementan anualmente el 2%

Pagos mensuales

Interés del 3% anual pagadero mensualmente

Duración 12 años (144 mensualidades)

Importe pedido 65.660,58336

Interés mensual  $3\%/12 = 0,25\% = 0,0025$

Tipo de interés anual  $(1,0025)^{12} = (1+i)$

$i = 0,03041595$

$65660,58336 = 0,03041595 / 0,03 \times \text{mensualidad} \times 12 \times (1 - 1,02^{12} \times 1,03041595^{-12}) / (1 + 0,03041595 - 1,02) =$

**489,7644655 mensualidad inicial**

Mensualidad segundo año  $489,76 \times 1,02 =$  **499,5597**

Cuadro para los doce años del préstamo ( en el examen no haríamos este cuadro, solo indicaría el importe de las doce mensualidades para cada año)

| Mes | Mensualidad | Interés     | Cuota amortización | Capital vivo |
|-----|-------------|-------------|--------------------|--------------|
|     |             |             |                    | 65660,58     |
| 1   | 489,7644655 | 164,15145   | 325,6130155        | 65334,96698  |
| 2   | 489,7644655 | 163,3374175 | 326,4270481        | 65008,53994  |
| 3   | 489,7644655 | 162,5213498 | 327,2431157        | 64681,29682  |
| 4   | 489,7644655 | 161,7032421 | 328,0612235        | 64353,2356   |
| 5   | 489,7644655 | 160,883089  | 328,8813765        | 64024,35422  |
| 6   | 489,7644655 | 160,0608856 | 329,70358          | 63694,65064  |
| 7   | 489,7644655 | 159,2366266 | 330,5278389        | 63364,1228   |
| 8   | 489,7644655 | 158,410307  | 331,3541585        | 63032,76864  |
| 9   | 489,7644655 | 157,5819216 | 332,1825439        | 62700,5861   |

|    |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 10 | 489,7644655 | 156,7514652 | 333,0130003 | 62367,5731  |
| 11 | 489,7644655 | 155,9189327 | 333,8455328 | 62033,72757 |
| 12 | 489,7644655 | 155,0843189 | 334,6801466 | 61699,04742 |
| 13 | 499,5597    | 154,2476185 | 345,3120815 | 61353,73534 |
| 14 | 499,5597    | 153,3843383 | 346,1753617 | 61007,55998 |
| 15 | 499,5597    | 152,5188999 | 347,0408001 | 60660,51918 |
| 16 | 499,5597    | 151,6512979 | 347,9084021 | 60312,61077 |
| 17 | 499,5597    | 150,7815269 | 348,7781731 | 59963,8326  |
| 18 | 499,5597    | 149,9095815 | 349,6501185 | 59614,18248 |
| 19 | 499,5597    | 149,0354562 | 350,5242438 | 59263,65824 |
| 20 | 499,5597    | 148,1591456 | 351,4005544 | 58912,25768 |
| 21 | 499,5597    | 147,2806442 | 352,2790558 | 58559,97863 |
| 22 | 499,5597    | 146,3999466 | 353,1597534 | 58206,81888 |
| 23 | 499,5597    | 145,5170472 | 354,0426528 | 57852,77622 |
| 24 | 499,5597    | 144,6319406 | 354,9277594 | 57497,84846 |
| 25 | 509,550894  | 143,7446212 | 365,8062728 | 57132,04219 |
| 26 | 509,550894  | 142,8301055 | 366,7207885 | 56765,3214  |
| 27 | 509,550894  | 141,9133035 | 367,6375905 | 56397,68381 |
| 28 | 509,550894  | 140,9942095 | 368,5566845 | 56029,12713 |
| 29 | 509,550894  | 140,0728178 | 369,4780762 | 55659,64905 |
| 30 | 509,550894  | 139,1491226 | 370,4017714 | 55289,24728 |
| 31 | 509,550894  | 138,2231182 | 371,3277758 | 54917,9195  |
| 32 | 509,550894  | 137,2947988 | 372,2560952 | 54545,66341 |
| 33 | 509,550894  | 136,3641585 | 373,1867355 | 54172,47667 |
| 34 | 509,550894  | 135,4311917 | 374,1197023 | 53798,35697 |
| 35 | 509,550894  | 134,4958924 | 375,0550016 | 53423,30197 |
| 36 | 509,550894  | 133,5582549 | 375,9926391 | 53047,30933 |
| 37 | 519,7419119 | 132,6182733 | 387,1236386 | 52660,18569 |
| 38 | 519,7419119 | 131,6504642 | 388,0914477 | 52272,09424 |
| 39 | 519,7419119 | 130,6802356 | 389,0616763 | 51883,03257 |
| 40 | 519,7419119 | 129,7075814 | 390,0343305 | 51492,99824 |

|    |             |             |             |             |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 41 | 519,7419119 | 128,7324956 | 391,0094163 | 51101,98882 |
| 42 | 519,7419119 | 127,7549721 | 391,9869398 | 50710,00188 |
| 43 | 519,7419119 | 126,7750047 | 392,9669072 | 50317,03497 |
| 44 | 519,7419119 | 125,7925874 | 393,9493244 | 49923,08565 |
| 45 | 519,7419119 | 124,8077141 | 394,9341978 | 49528,15145 |
| 46 | 519,7419119 | 123,8203786 | 395,9215333 | 49132,22992 |
| 47 | 519,7419119 | 122,8305748 | 396,9113371 | 48735,31858 |
| 48 | 519,7419119 | 121,8382965 | 397,9036154 | 48337,41497 |
| 49 | 530,1367501 | 120,8435374 | 409,2932127 | 47928,12175 |
| 50 | 530,1367501 | 119,8203044 | 410,3164457 | 47517,80531 |
| 51 | 530,1367501 | 118,7945133 | 411,3422368 | 47106,46307 |
| 52 | 530,1367501 | 117,7661577 | 412,3705924 | 46694,09248 |
| 53 | 530,1367501 | 116,7352312 | 413,4015189 | 46280,69096 |
| 54 | 530,1367501 | 115,7017274 | 414,4350227 | 45866,25594 |
| 55 | 530,1367501 | 114,6656398 | 415,4711103 | 45450,78483 |
| 56 | 530,1367501 | 113,6269621 | 416,5097881 | 45034,27504 |
| 57 | 530,1367501 | 112,5856876 | 417,5510625 | 44616,72398 |
| 58 | 530,1367501 | 111,5418099 | 418,5949402 | 44198,12904 |
| 59 | 530,1367501 | 110,4953226 | 419,6414275 | 43778,48761 |
| 60 | 530,1367501 | 109,446219  | 420,6905311 | 43357,79708 |
| 61 | 540,7394851 | 108,3944927 | 432,3449924 | 42925,45208 |
| 62 | 540,7394851 | 107,3136302 | 433,4258549 | 42492,02623 |
| 63 | 540,7394851 | 106,2300656 | 434,5094195 | 42057,51681 |
| 64 | 540,7394851 | 105,143792  | 435,5956931 | 41621,92112 |
| 65 | 540,7394851 | 104,0548028 | 436,6846823 | 41185,23643 |
| 66 | 540,7394851 | 102,9630911 | 437,776394  | 40747,46004 |
| 67 | 540,7394851 | 101,8686501 | 438,870835  | 40308,58921 |
| 68 | 540,7394851 | 100,771473  | 439,9680121 | 39868,62119 |
| 69 | 540,7394851 | 99,67155298 | 441,0679321 | 39427,55326 |
| 70 | 540,7394851 | 98,56888315 | 442,170602  | 38985,38266 |
| 71 | 540,7394851 | 97,46345665 | 443,2760285 | 38542,10663 |

|     |             |             |             |             |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 72  | 540,7394851 | 96,35526658 | 444,3842185 | 38097,72241 |
| 73  | 551,5542748 | 95,24430603 | 456,3099688 | 37641,41244 |
| 74  | 551,5542748 | 94,10353111 | 457,4507437 | 37183,9617  |
| 75  | 551,5542748 | 92,95990425 | 458,5943706 | 36725,36733 |
| 76  | 551,5542748 | 91,81341832 | 459,7408565 | 36265,62647 |
| 77  | 551,5542748 | 90,66406618 | 460,8902086 | 35804,73626 |
| 78  | 551,5542748 | 89,51184066 | 462,0424342 | 35342,69383 |
| 79  | 551,5542748 | 88,35673457 | 463,1975402 | 34879,49629 |
| 80  | 551,5542748 | 87,19874072 | 464,3555341 | 34415,14076 |
| 81  | 551,5542748 | 86,03785189 | 465,5164229 | 33949,62433 |
| 82  | 551,5542748 | 84,87406083 | 466,680214  | 33482,94412 |
| 83  | 551,5542748 | 83,7073603  | 467,8469145 | 33015,0972  |
| 84  | 551,5542748 | 82,53774301 | 469,0165318 | 32546,08067 |
| 85  | 562,5853603 | 81,36520168 | 481,2201586 | 32064,86051 |
| 86  | 562,5853603 | 80,16215128 | 482,423209  | 31582,4373  |
| 87  | 562,5853603 | 78,95609326 | 483,6292671 | 31098,80804 |
| 88  | 562,5853603 | 77,74702009 | 484,8383402 | 30613,9697  |
| 89  | 562,5853603 | 76,53492424 | 486,0504361 | 30127,91926 |
| 90  | 562,5853603 | 75,31979815 | 487,2655622 | 29640,6537  |
| 91  | 562,5853603 | 74,10163425 | 488,4837261 | 29152,16997 |
| 92  | 562,5853603 | 72,88042493 | 489,7049354 | 28662,46504 |
| 93  | 562,5853603 | 71,65616259 | 490,9291977 | 28171,53584 |
| 94  | 562,5853603 | 70,4288396  | 492,1565207 | 27679,37932 |
| 95  | 562,5853603 | 69,1984483  | 493,386912  | 27185,99241 |
| 96  | 562,5853603 | 67,96498102 | 494,6203793 | 26691,37203 |
| 97  | 573,8370675 | 66,72843007 | 507,1086375 | 26184,26339 |
| 98  | 573,8370675 | 65,46065848 | 508,376409  | 25675,88698 |
| 99  | 573,8370675 | 64,18971745 | 509,6473501 | 25166,23963 |
| 100 | 573,8370675 | 62,91559908 | 510,9214684 | 24655,31816 |
| 101 | 573,8370675 | 61,63829541 | 512,1987721 | 24143,11939 |
| 102 | 573,8370675 | 60,35779848 | 513,479269  | 23629,64012 |

|     |             |             |             |             |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 103 | 573,8370675 | 59,0741003  | 514,7629672 | 23114,87715 |
| 104 | 573,8370675 | 57,78719289 | 516,0498746 | 22598,82728 |
| 105 | 573,8370675 | 56,4970682  | 517,3399993 | 22081,48728 |
| 106 | 573,8370675 | 55,2037182  | 518,6333493 | 21562,85393 |
| 107 | 573,8370675 | 53,90713483 | 519,9299327 | 21042,924   |
| 108 | 573,8370675 | 52,60731    | 521,2297575 | 20521,69424 |
| 109 | 585,3138089 | 51,3042356  | 534,0095733 | 19987,68467 |
| 110 | 585,3138089 | 49,96921167 | 535,3445972 | 19452,34007 |
| 111 | 585,3138089 | 48,63085018 | 536,6829587 | 18915,65711 |
| 112 | 585,3138089 | 47,28914278 | 538,0246661 | 18377,63245 |
| 113 | 585,3138089 | 45,94408111 | 539,3697278 | 17838,26272 |
| 114 | 585,3138089 | 44,59565679 | 540,7181521 | 17297,54457 |
| 115 | 585,3138089 | 43,24386141 | 542,0699475 | 16755,47462 |
| 116 | 585,3138089 | 41,88868655 | 543,4251223 | 16212,0495  |
| 117 | 585,3138089 | 40,53012374 | 544,7836851 | 15667,26581 |
| 118 | 585,3138089 | 39,16816453 | 546,1456443 | 15121,12017 |
| 119 | 585,3138089 | 37,80280042 | 547,5110085 | 14573,60916 |
| 120 | 585,3138089 | 36,43402289 | 548,879786  | 14024,72937 |
| 121 | 597,0200851 | 35,06182343 | 561,9582616 | 13462,77111 |
| 122 | 597,0200851 | 33,65692778 | 563,3631573 | 12899,40795 |
| 123 | 597,0200851 | 32,24851988 | 564,7715652 | 12334,63639 |
| 124 | 597,0200851 | 30,83659097 | 566,1834941 | 11768,45289 |
| 125 | 597,0200851 | 29,42113223 | 567,5989528 | 11200,85394 |
| 126 | 597,0200851 | 28,00213485 | 569,0179502 | 10631,83599 |
| 127 | 597,0200851 | 26,57958998 | 570,4404951 | 10061,3955  |
| 128 | 597,0200851 | 25,15348874 | 571,8665963 | 9489,528899 |
| 129 | 597,0200851 | 23,72382225 | 573,2962628 | 8916,232636 |
| 130 | 597,0200851 | 22,29058159 | 574,7295035 | 8341,503133 |
| 131 | 597,0200851 | 20,85375783 | 576,1663272 | 7765,336806 |
| 132 | 597,0200851 | 19,41334201 | 577,606743  | 7187,730063 |
| 133 | 608,9604868 | 17,96932516 | 590,9911616 | 6596,738901 |

|     |             |             |             |             |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 134 | 608,9604868 | 16,49184725 | 592,4686395 | 6004,270262 |
| 135 | 608,9604868 | 15,01067565 | 593,9498111 | 5410,32045  |
| 136 | 608,9604868 | 13,52580113 | 595,4346856 | 4814,885765 |
| 137 | 608,9604868 | 12,03721441 | 596,9232723 | 4217,962492 |
| 138 | 608,9604868 | 10,54490623 | 598,4155805 | 3619,546912 |
| 139 | 608,9604868 | 9,04886728  | 599,9116195 | 3019,635292 |
| 140 | 608,9604868 | 7,549088231 | 601,4113985 | 2418,223894 |
| 141 | 608,9604868 | 6,045559735 | 602,914927  | 1815,308967 |
| 142 | 608,9604868 | 4,538272417 | 604,4222143 | 1210,886753 |
| 143 | 608,9604868 | 3,027216882 | 605,9332699 | 604,9534827 |
| 144 | 608,9604868 | 1,512383707 | 607,448103  | 0           |

**5.2.** La empresa VERHIDROG se ha constituido ante la oportunidad de negocio que ofrece la producción de hidrógeno verde y las facilidades de financiación existentes, ya que espera recibir fondos procedentes del Componente 9: “Hidrógeno renovable: un proyecto país” del Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia. No obstante, mientras recibe los mismos, precisa realizar una inversión de 50 millones de euros para adquirir los terrenos y realizar las obras de las instalaciones fotovoltaicas necesarias para la obtención de energía que requiere la producción.

Para ello decide emitir un empréstito constituido por 25.000 títulos, emitidos a la par, con una duración de 10 años. Por prudencia, al no saber cuándo va a recibir los fondos europeos, opta por estipular el no abono de cupones anuales, que se acumularán al momento del sorteo a razón de un 10% anual y compensa a los inversores ofreciendo un reparto de un premio anual de 100.000€. Los gastos de administración son del 2% sobre los importes pagados anualmente.

**SE PIDE:**

1. Anualidad constante.
2. Títulos en circulación a principio del cuarto año.
3. Títulos amortizados en el sexto año

Emprestito emitido a la par

Importe 50.000.000 euros

25.000 títulos emitidos a la par

Nominal por título  $50.000.000/25.000 = 2.000$

10 años de duración

Anualidades contantes

Cupones acumulativos y pagaderos al amortizar los títulos

Lote 100.000 euros

2% gastos administrativos sobre los importes pagados anualmente

Intereses 10% anual

La estructura de la anualidad en un empréstito con cupón acumulado

$$a_k = C \times (1+i)^k + M_k$$

La estructura de la anualidad en un empréstito con cupón acumulado

$$a_k = (C \times (1+i)^k + M_k + L) \times (1+G)$$

Despejando

$$a_k / (1+G) - L = (C \times (1+i)^k + M_k)$$

Sustituyendo  $a'_k = a_k / (1+G) - L$

Podemos resolver la ecuación con la estructura de un empréstito con cupón acumulado sin características comerciales

$$a'_k = C \times (1+i)^k + M_k$$

Donde la anualidad se calcula

$$a = \frac{C \times N_1}{\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}}$$

$$\text{anualidad} = (25.000 \times 2.000) / ((1 - 1,1)^{-10} / 0,1) = 8.137.269,74$$

Despejando en la formula inicial para obtener la anualidad real incluyendo las características comerciales

$$a_k' = a_k / (1+G) - L$$

$$8.137.269,74 = a_k / (1,002) - 100.000$$

$$a_k = 8.253.744,28$$

$$a_k' = C \times (1 + i)^k + M_k$$

$$8.137.269,74 = 2.000 \times (1 + 0,10)^k \times M_1$$

$$M_1 = 3698,76$$

$$M_2 = M_1 / (1+i)$$

Títulos en circulación a principio del cuarto año o finales del tercer año

$$C_3 = ((8.137.269,74 \times (1 - 1,1^{-7}) / 0,1) / (1,1)^3) / 2.000 = 14.881,8$$

Títulos amortizados en el sexto año

$$M_1 = 3698,76$$

$$M_2 = m_1 / (1+i)$$

$$M_6 = 3698,76 / 1,1^5 = 2.296,63$$

Lo títulos no se puede amortizar parcialmente por lo que debería redondearse los títulos amortizados cada año

Cuadro empréstito

|   | Anualidad    | Intereses acumulados | Títulos amortizados | Capital amortizado | Lote    | Gastos     | Títulos vivos |
|---|--------------|----------------------|---------------------|--------------------|---------|------------|---------------|
|   |              |                      |                     |                    |         |            | 25.000        |
| 1 | 8.253.744,28 | 739751,78            | 3.698,76            | 7397517,8          | 100.000 | 16474,5395 | 21.301,24     |
| 2 | 8.253.744,28 | 1412253,398          | 3362,508091         | 6725016,182        | 100.000 | 16474,5395 | 17.938,73     |
| 3 | 8.253.744,28 | 2023618,506          | 3056,825537         | 6113651,074        | 100.000 | 16474,5395 | 14.881,91     |
| 4 | 8.253.744,28 | 2579404,967          | 2778,932307         | 5557864,613        | 100.000 | 16474,5395 | 12.102,98     |
| 5 | 8.253.744,28 | 3084665,386          | 2526,302097         | 5052604,194        | 100.000 | 16474,5395 | 9.576,67      |

|    |              |             |             |             |         |            |          |
|----|--------------|-------------|-------------|-------------|---------|------------|----------|
| 6  | 8.253.744,28 | 3543993,04  | 2296,63827  | 4593276,54  | 100.000 | 16474,5395 | 7.280,03 |
| 7  | 8.253.744,28 | 3961563,635 | 2087,852973 | 4175705,945 | 100.000 | 16474,5395 | 5.192,18 |
| 8  | 8.253.744,28 | 4341173,266 | 1898,048157 | 3796096,314 | 100.000 | 16474,5395 | 3.294,13 |
| 9  | 8.253.744,28 | 4686272,931 | 1725,498324 | 3450996,649 | 100.000 | 16474,5395 | 1.568,64 |
| 10 | 8.253.744,28 | 4999999,899 | 1568,63484  | 3137269,681 | 100.000 | 16474,5395 | 0,00     |

Títulos vivos y amortizados cada año redondeando

|       | Títulos amortizados | Títulos amortizados redondeando | Títulos vivos con redondeo |
|-------|---------------------|---------------------------------|----------------------------|
|       |                     |                                 | 25000                      |
| 1     | 3.698,76            | 3.699,00                        | 21301                      |
| 2     | 3362,508091         | 3.362,00                        | 17939                      |
| 3     | 3056,825537         | 3.057,00                        | 14882                      |
| 4     | 2778,932307         | 2.779,00                        | 12103                      |
| 5     | 2526,302097         | 2.526,00                        | 9577                       |
| 6     | 2296,63827          | 2.297,00                        | 7280                       |
| 7     | 2087,852973         | 2.088,00                        | 5192                       |
| 8     | 1898,048157         | 1.898,00                        | 3294                       |
| 9     | 1725,498324         | 1.725,00                        | 1569                       |
| 10    | 1568,63484          | 1.569,00                        | 0                          |
| Total | 25.000,00           | 25.000,00                       |                            |